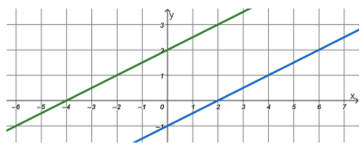
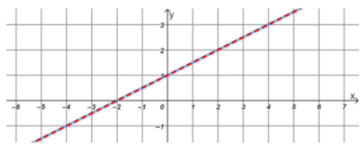
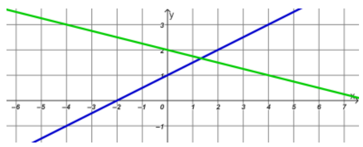
§1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

<u>Необходимые теоретические сведения:</u>

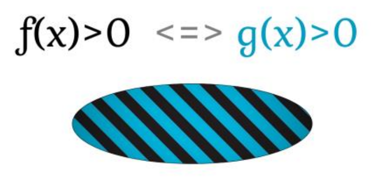
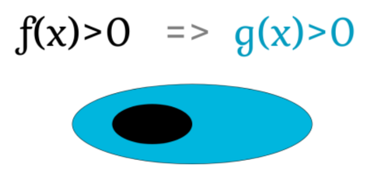
Линейными называются функции вида: $f(x) = kx + m$ (или $Ax + By = C$). Линейные уравнения и неравенства – те, в которых линейная функция сравнивается с нулём (или другой линейной функцией).

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

Система уравнений **не имеет** решений (графики функций *параллельны*)		$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
Система уравнений имеет **бесконечное количество** решений (графики функций *совпадают*)		$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
Система уравнений имеет **одно** решение (графики функций *пересекаются*)		$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$

Линейные неравенства

Неравенство 2 называются *равносильным* неравенству 1, если множества их решений *совпадают* (в частности множества решений могут быть пустыми).	
Неравенство 2 является *следствием* неравенства 1 (или из неравенства 1 *следует* неравенство 2), если каждое решение неравенства 1 является также решением неравенства 2 (множество решений неравенства 1 содержится в множестве решений неравенства 2).	

Пример 1. При всех значениях параметра a решить уравнение $2x + a = 3$. *Ответ*: $x = \frac{3-a}{2}$

Пример 2. При всех a решить уравнение $ax = 1$. *Ответ*: $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}; a = 0 \Rightarrow x \epsilon \emptyset$

Пример 3. При всех a решить уравнение $(a + 2)x = a^2 - 4$. *Ответ*: $a \neq -2 \Rightarrow x = a - 2; a = -2 \Rightarrow x \epsilon \mathbb{R}$

Пример 4. При каких a не имеет решений система уравнений: $\begin{cases} ax - 4y = a + 1 \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$ *Ответ*: -4

Пример 5. При всех a решить неравенство $ax > 1$. *Ответ*: $a > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{a}; a < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{a}; a = 0 \Rightarrow x \epsilon \emptyset$

Пример 6. При каких a неравенство $2x - a \leq 3$ является следствием неравенства $3a - x > 5$? *Ответ*: $a \leq \frac{13}{5}$

1.1. При всех a решите уравнение
$0{,}2x - a = 1.$
Ответ:

1.2. При всех a решите уравнение
$ax = 0.$
Ответ:

1.3. При всех a решите уравнение
$(a-1)x = a+3.$
Ответ:

1.4. При каких a и b решите уравнение
$(a+5)x = 2b-6$
имеет бесконечно много решений?
Ответ:

1.5. При каких k и m решите уравнение
$(k^2+2k-3)x = m+4$
не имеет решений?
Ответ:

1.6. При каких b система
$$\begin{cases} -4x - 4by = b+1 \\ (b+1)x + 2y = b+3 \end{cases}$$
не имеет решений?
Ответ:

1.7. При каких k система
$$\begin{cases} (k-2)x + 27y = 4{,}5 \\ 2x + (k+1)y = -1 \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений?
Ответ:

1.8. При каких n система
$$\begin{cases} 2x + (9n^2-2)y = 3n \\ x + y = 1 \end{cases}$$
не имеет решений?
Ответ:

1.9. Найдите все такие b, чтобы при любом значении a система
$$\begin{cases} 3x + y = a \\ ax - y = b \end{cases}$$
имела хотя бы одно решение.
Ответ:

1.10. При всех a решить неравенство $ax \le 0$.
Ответ:

1.11. При всех a решить неравенство
$(a^2-3a+2)x \ge a-1.$
Ответ:

1.12. При каких a из неравенства
$a + x \ge 1$
следует неравенство
$3x > a$?
Ответ:

1.13. При каких a из неравенства
$2x + a < 2$
следует неравенство
$x < -2$?
Ответ:

1.14. При каких a неравенство
$a - x \le 3$
является следствием неравенства
$x > 4$?
Ответ:

1.15. При каких a неравенства
$2x + a < 3$ и $x - 4a < -1$
равносильны?
Ответ:

1.16. При каких a система неравенств
$$\begin{cases} a - 3x \ge 5 \\ a \le x + 3 \end{cases}$$
имеет ровно одно решение?
Ответ:

1.17. При каких a система неравенств
$$\begin{cases} x + 4a \le 7 \\ 2x - a \ge 0 \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений?
Ответ:

1.18. При каких целых a уравнение
$$(2a+3)x = 4a+9$$
имеет целые решения?
Подсказка: гипербола
Ответ:

§2. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ПАРАБОЛА

Необходимые теоретические сведения:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

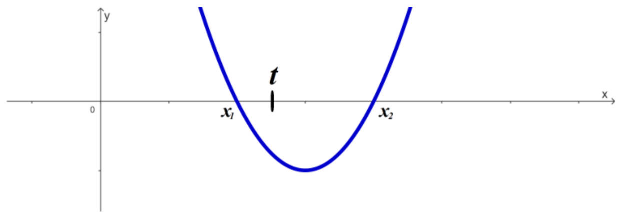
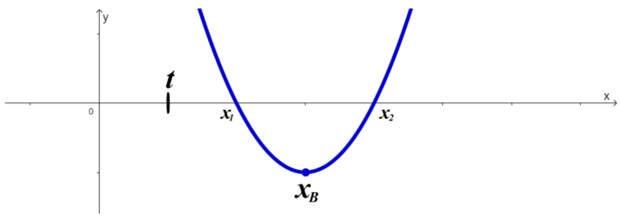
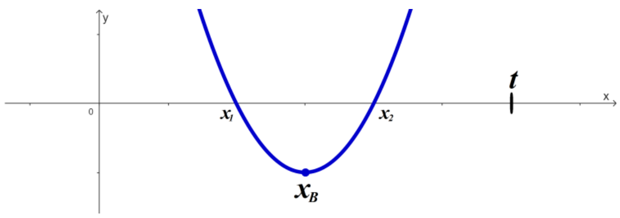
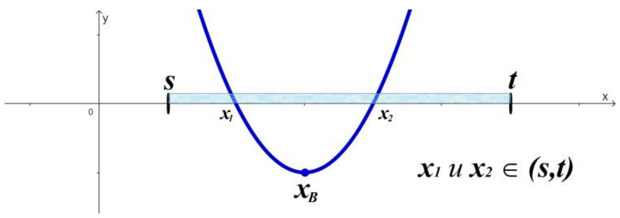
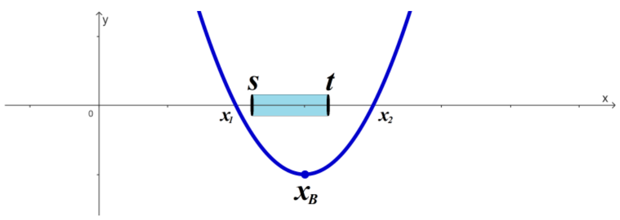
(случай $a = 0$ рассматривать отдельно, в этом случае функция перестаёт быть квадратичной)

Если уравнение имеет **два** корня, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Если уравнение имеет **один** корень, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} \implies x_В = -\frac{b}{2a},\ y_В = -\frac{D}{4a}.$$

Основные ситуации расположения корней относительно чисел и отрезков:

<table>
<tr><td>Корни уравнения лежат по разные стороны от некоторого числа t.</td><td>
</td><td>$\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot f(t) < 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Корни уравнения больше некоторого числа t.</td><td>
</td><td>$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(t) > 0 \\ x_В > t \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Корни уравнения меньше некоторого числа t.</td><td>
</td><td>$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(t) > 0 \\ x_В < t \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Корни уравнения принадлежат некоторому промежутку (s,t).</td><td>
</td><td>$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(s) > 0 \\ a \cdot f(t) > 0 \\ s < x_В < t \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Отрезок (s,t) расположен между корнями уравнения.</td><td>
</td><td>$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(s) < 0 \\ a \cdot f(t) < 0 \end{cases}$</td></tr>
</table>

Дискриминант и корни:

Пример 1. Определите, сколько существует различных значений a, при которых уравнение $(1-a^2)x^2+ax+1=0$ имеет единственное решение. *Ответ*: Четыре

Пример 2. При всех a решить уравнение $x^2+ax+9=0$.

Ответ: $a\epsilon(-\infty;-6]\cup[6;+\infty)\Rightarrow x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-36}}{2}; a\epsilon(-6;6)\Rightarrow x\epsilon\emptyset$

Пример 3. При всех a решить уравнение $ax^2+x+1=0$.

Ответ: $a\epsilon(-\infty;0)\cup(0;\frac{1}{4}]\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2a}; a=0\Rightarrow x=-1; a\epsilon\left(\frac{1}{4};+\infty\right)\Rightarrow x\epsilon\emptyset$

Теорема Виета:

Пример 4. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2-(2a+1)x+a^2+2=0$ в два раза больше другого. *Ответ*: $a=4$

Пример 5. При каких значениях a сумма квадратов двух различных корней уравнения $x^2-4ax+5a=0$ равна 6? *Ответ*: $a=-\frac{3}{8}$

Пример 6. При каком значении параметра a значение выражения $x_1^2+x_2^2$ будет наименьшим, если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2-2ax+2a-5=0$? *Ответ*: $a=0{,}5$

Пример 7. При каких значениях a уравнение $(a-3)x^2-2ax+5a=0$ имеет только положительные корни? *Ответ*: $a\epsilon\left[3;\frac{15}{4}\right]$

Пример 8. При каких a уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень? *Подсказка*: система решается вычитанием. *Ответ*: $a=-2$

Расположение корней:

Пример 9. При всех a решить неравенство $x^2-2ax+4>0$.

Ответ: $a\epsilon(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)\Rightarrow x\epsilon\left(-\infty;a-\sqrt{a^2-4}\right)\cup\left(a+\sqrt{a^2-4};+\infty\right); a\epsilon(-2;2)\Rightarrow x\epsilon\mathbb{R}$

Пример 10. Найти все такие a, что решения неравенства $x^2+(a-5)x-2a^2+2a+4\le 0$ образуют отрезок, длина которого больше 6. *Ответ*: $a\epsilon(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$

Пример 11. Докажите, что уравнение $(a^2-a+1)x^2+(2a^2+10a+3)x-4a^2-9a-5=0$ имеет два различных корня при любом a. *Подсказка*: ветви всегда вверх, а $f(1)<0$

Пример 12. При каких значениях параметра a один корень уравнения $x^2+ax+4=0$ меньше 2, а другой больше 2? *Ответ*: $a<-4$

Пример 13. При каких значениях параметра a один корень уравнения $ax^2+2x+2a+1=0$ меньше 1, а другой больше 1? *Ответ*: $a\epsilon(-1;0)$

Пример 14. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2+2(a-2)x-4a+5=0$ различны и оба меньше 1? *Ответ*: $a\epsilon(-\infty;-1)\cup\left(1;\frac{5}{3}\right)$

Пример 15. Найти все значения a, при которых все корни уравнения $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ больше 0,5. *Ответ*: $a\epsilon\left[\frac{16}{17};2\right]$

Пример 16. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2+ax+4=0$ принадлежат интервалу $(1;3)$? *Ответ*: $a\epsilon\left(-\frac{13}{3};-4\right]$

Пример 17. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2+(4-2a)x+1=0$ по модулю меньше 1? *Ответ*: $a\epsilon\{0\}\cup[4;5)$

Пример 18. При каких значениях параметра a неравенство $x^2+ax+1<0$ выполнено для любого $x\epsilon[1;2]$? *Ответ*: $a<-\frac{5}{2}$

Пример 19. При каких значениях параметра a существует единственный корень уравнения $x^2-ax+2=0$, удовлетворяющий условию $1<x<3$? *Ответ*: $a\epsilon\{2\sqrt{2}\}\cup\left[3;\frac{11}{3}\right)$

Пример 20. При всех значениях параметра a решите уравнение $4^x+a\cdot 25^x=3\cdot 10^x$.

Ответ: $a\le 0\Rightarrow x=\log_{\frac{2}{5}}\frac{3+\sqrt{9-4a}}{2}; a\epsilon\left(0;\frac{9}{4}\right)\Rightarrow x=\log_{\frac{2}{5}}\frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2}; a=\frac{9}{4}\Rightarrow x=\log_{\frac{2}{5}}\frac{3}{2}; a>\frac{9}{4}\Rightarrow x\epsilon\emptyset$

ДИСКРИМИНАНТ И КОРНИ

2.1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$x^2 + 2x + a = 0$$
не имеет корней.
Ответ:

2.2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax^2 + 4x + 2 = 0$$
имеет два различных корня.
Ответ:

2.3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$$
не имеет корней.
Ответ:

2.4. Найдите значения параметра m, при которых выражение
$$\text{а) } x^2 - 2(2+m)x + 12 + m^2$$
$$\text{б) } 2mx^2 + (2m-4)x + \frac{m}{2} + 3$$
является полным квадратом.
Ответ:

2.5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$(2a-1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$$
имеет не более одного решения.
Ответ:

2.6. При каких a уравнение
$$a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 = 0$$
имеет более одного корня?
Ответ:

2.7. При каких a система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ xy = a - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
имеет ровно два решения?
Ответ:

2.8. При всех значениях a решите уравнение
$$x^2 + 2ax - 1 = 0$$
Ответ:

2.9. При всех значениях a решите уравнение
$$x^2 - 2ax + 1 = 0$$
Ответ:

2.10. При всех значениях a решите уравнение
$$ax^2 + 3x - 1 = 0$$
Ответ:

2.11. При всех значениях a решите уравнение
$$(a-1)x^2 - 2ax + 2a - 2 = 0$$
Ответ:

2.12. Найдите, при каких p отношение корней уравнения
$$x^2 + px - 16 = 0$$
равно -4.
Ответ:

2.13. При каком целом значении k один из корней уравнения
$$4x^2 - (3k+2)x + k^2 - 1 = 0$$
втрое меньше другого?
Ответ:

2.14. Найдите все значения a, при каждом из которых один корень уравнения
$$\text{а) } 9x^2 - 18(a-1)x - 8a + 24 = 0$$
$$\text{б) } x^2 + 4(a-2)x + 9a^2 + 5 = 0$$
вдвое больше другого.
Ответ:

2.15. При каких a сумма квадратов различных корней уравнения
$$x^2 - ax + a + 1 = 0$$
больше 1?
Ответ:

2.16. При каких a сумма корней уравнения
$$x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$$
равна сумме квадратов корней?
Ответ:

2.17. При каких a сумма кубов различных корней уравнения
$$x^2 - x + a = 0$$
не больше 1?
Ответ:

2.18. При каких a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$$

максимальна?

Ответ:

2.19. При каких a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - ax + a - 2 = 0$$

минимальна?

Ответ:

2.20. При каких a разность корней уравнения

$$2x^2 - (a+1)x + a + 3 = 0$$

равна 1?

Ответ:

2.21. При каких a один из корней уравнения

$$8x^2 - 30x + a = 0$$

равен квадрату другого?

Ответ:

2.22. При каком целом значении параметра b корни уравнения

$$5x^2 + bx - 28 = 0$$

удовлетворяют условию $5x_1 + 2x_2 = 1$?

Ответ:

2.23. Найдите числа p и q, если известно, что они являются корнями уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

Ответ:

2.24. Найдите все a, при которых уравнение

$$(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$$

имеет только положительные корни.

Ответ:

2.25. Найдите все a, при которых уравнение

$$(2-x)(x+1) = a$$

имеет два различных неотрицательных корня.

Ответ:

2.26. Найдите все a, при которых уравнение

$$(a-3)x^2 - 6x + a + 5 = 0$$

имеет два различных неотрицательных корня.

Ответ:

РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ

2.27. Докажите, что уравнение имеет решение при любом a:

$$(a^2+1)x^2 + (a^3 + 4a^2 + a)x - a^2 - 2 = 0$$

Ответ:

2.28. Докажите, что уравнение имеет решение при любом a:

$$(a^2 - 2a + 3)x^2 - (3a^2 + 5a - 1)x + 7a - 8 = 0$$

Ответ:

2.29. Докажите, что уравнение имеет решение при любом a:

$$(a^3 - 2a^2)x^2 + (a^3 - a + 2)x + a^2 + 1 = 0$$

Ответ:

2.30. При каких a один корень уравнения

$$2x^2 + ax + 4 - a = 0$$

больше 3, а другой меньше 3?

Ответ:

2.31. При каких a один корень уравнения

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$$

больше 1, а другой меньше 1?

Ответ:

2.32. При каких a число –1 лежит между корнями уравнения

$(a-2)x^2 + 3ax + 5 = 0$?

Ответ:

2.33. При каких a один корень уравнения

$$(a^2 - 2)x^2 + (a^2 + a - 1)x - a^3 + a = 0$$

больше a, а другой меньше a?

Ответ:

2.34. При каких a оба корня уравнения

$$x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$$

больше 3?

Ответ:

2.35. При каких a оба корня уравнения

$$x^2 + 4ax + 1 - 2a + 4a^2 = 0$$

меньше –1?

Ответ:

2.36. При каких a корни уравнения
$$(2+a)x^2-2ax+3a=0$$
различны и положительны?
Ответ:

2.37. При каких a оба корня уравнения
$$ax^2-2(2a-1)x+2-3a=0$$
больше 1?
Ответ:

2.38. При каких a корни уравнения
$$x^2+x+a=0$$
больше a?
Ответ:

2.39. При каких a корни уравнения
$$x^2-ax+2=0$$
различны и принадлежат интервалу (0;3)?
Ответ:

2.40. При каких a корни уравнения
$$x^2-2ax+a^2-a=0$$
расположены на отрезке [–2;6]?
Ответ:

2.41. При каких a корни уравнения
$$ax^2-(a+1)x+2=0$$
по модулю меньше 1?
Ответ:

2.42. При каких a корни уравнения
$$(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$$
удовлетворяют условию $0 < x < 3$?
Ответ:

2.43. При каких a корни уравнения
$$x^2-2ax+a^2-2=0$$
расположены на отрезке [2;5]?
Ответ:

2.44. При каких значениях a ровно один из двух корней уравнения
$$x^2-4x+a=0$$
принадлежат интервалу (1;4)?
Ответ:

2.45. При каких значениях a неравенство
$$x^2+a^2x-2a-4<0$$
выполнено для всех $x\in[0;1]$?
Ответ:

2.46. При каких значениях a неравенство
$$x^2-ax+a>0$$
выполнено для всех $|x| < 1$?
Ответ:

2.47. При каких значениях a неравенство
$$(x-3a)(x+2a+1)<0$$
выполнено для всех $x\in[1;3]$?
Ответ:

2.48. При каких значениях a неравенство
$$ax^2+(a+1)x-3<0$$
выполнено для всех $x < 2$?
Ответ:

2.49. При каких значениях a неравенство
$$ax^2-4x+3a+1>0$$
выполнено для всех $x > 0$?
Ответ:

2.50. При каких значениях a неравенство
$$(a-1)x^2+(2a-3)x+a-3>0$$
выполнено хотя бы при одном $x < 1$?
Ответ:

2.51. При каких значениях a уравнение
$$(a-1)x^2-2ax+2-3a=0$$
имеет единственное решение, которое удовлетворяет неравенству $x > 1$?
Ответ:

2.52. При каких значениях a уравнение
$$(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$$
имеет единственное решение, которое удовлетворяет неравенству $0 < x < 3$?
Ответ:

2.53. При каких значениях a неравенство
$$(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$$
выполняется для любых x?
Ответ:

2.54. Найдите все a, при которых уравнение
$$ax^2 + 2(a+3)x + (a+4) = 0$$
имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.
Ответ:

2.55. Найдите все a, при которых уравнение
$$ax^2 + 2(a+2)x + (a+5) = 0$$
имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.
Ответ:

2.56. Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения
$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$
принимает наибольшее значение.
Ответ:

2.57. Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения
$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 12a = 0$$
принимает наибольшее значение.
Ответ:

2.58. Найдите все a, при которых уравнение
$$(x^2 + x + 2a^2 + 1)^2 = 8a^2(x^2 + x + 1)$$
имеет ровно один корень.
Ответ:

2.59. Найдите все a, при которых уравнение
$$(2x^2 + x + 3a^2 + 5)^2 = 12a^2(2x^2 + x + 5)$$
имеет ровно один корень.
Ответ:

2.60. Найдите все a, при которых уравнение
$$(6x^2 - 6x + a^2 + 6)^2 = 24a^2(x^2 - x + 1)$$
имеет ровно один корень.
Ответ:

2.61. Найдите все a, при которых уравнение
$$(3x^2 - 3x + a^2 + 9)^2 = 12a^2(x^2 - x + 3)$$
имеет ровно один корень.
Ответ:

2.62. Найдите все a, при которых уравнение
$$(2x^2 - 2x + 3a^2 + 2)^2 = 24a^2(x^2 - x + 1)$$
имеет ровно один корень.
Ответ:

2.63. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(x^2 - x - a)^2 = 2x^4 + 2(x+a)^2$$
имеет единственное решение на отрезке [-1; 1].
Ответ:

2.64. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(x^2 + 2x + 2a)^2 = 5x^4 + 5(x+a)^2$$
имеет единственное решение на отрезке [0; 2].
Ответ:

§3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

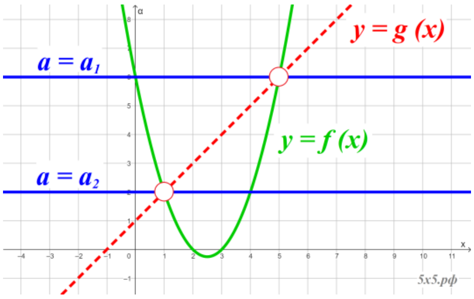
Необходимые теоретические сведения:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Longrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

Варианты рациональных неравенств:

$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases} \end{array}\right.$	$\frac{f(x)}{g(x)}<0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0 \end{cases} \end{array}\right.$	$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\leq 0 \\ g(x)<0 \end{cases} \end{array}\right.$	$\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\leq 0 \\ g(x)>0 \end{cases} \end{array}\right.$

График рациональной функции в системе координат xOa:



Пример 1. При всех значениях параметра a решите уравнение $\frac{x-a}{x^2-3x+2}=0$.

Ответ: $a=1$ или $2 \Rightarrow x\epsilon\emptyset$; $a\neq 1{,}2 \Rightarrow x=a$

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2+ax+1}{x-2}=0$ имеет единственный корень?

Ответ: $a=\pm 2,-\frac{5}{2}$

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $\frac{a}{x-a}>0$ содержит точку $x=1$. *Ответ*: $a\epsilon(0;1)$

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенства $\frac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $1\leq x\leq 2$. *Ответ*: $a\epsilon\left(\frac{1}{2};1\right)$

Пример 5. Найдите все параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{4x^2-a^2}{x^2+6x+9-a^2}=0$ имеет ровно два различных корня. *Ответ*: $a\neq -6;-2;0;2;6$

Пример 6. При каких значениях a уравнение $\left|\frac{7-|x|}{|x|-2}\right|=a$ имеет ровно четыре корня?

Ответ: $a\epsilon(0;1)\cup(3{,}5;+\infty)$

Пример 7. Найдите все a, при каждом из которых уравнение $-ax+\sqrt{3-2x-x^2}=8a+2$ имеет единственный корень. *Ответ*: $a\epsilon\left[-\frac{2}{5};-\frac{2}{9}\right)\cup\{0\}$

Пример 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(xy^2-3xy-3y+9)\sqrt{x-3}=0 \\ y=ax\end{cases}$ имеет ровно три различных решения. *Ответ*: $a\epsilon\left(0;\frac{1}{3}\right)$

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

3.1. При всех a решите уравнение
$$\frac{x^2-4x+3}{x-a}=0$$
Ответ:

3.2. При всех a решите уравнение
$$\frac{a(x-a)}{x-2}=0$$
Ответ:

3.3. При всех a решите уравнение
$$\frac{a(x-2)}{x-a}=0$$
Ответ:

3.4. Найдите все a, при которых неравенство
$$\frac{4x-a}{x-2a}<0$$
выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $2\le x\le 4$.
Ответ:

3.5. Найдите все a, при которых неравенство
$$\frac{x+3a-5}{x+a}\ge 0$$
выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $1\le x\le 4$.
Ответ:

3.6. Найдите все значения a, при которых множество решений неравенства
$$\frac{a}{x+a}<0$$
содержит точку 2.
Ответ:

3.7. Найдите все значения a, при которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства
$$\frac{x-3a}{a-2x}<0$$
Ответ:

3.8. При каких значениях a уравнение
$$\frac{(a+4)x^2+6x-1}{x+3}=0$$
имеет единственное решение?
Ответ:

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД

3.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\frac{x^2-4x+a}{x^2-6ax+5a^2}=0$$
имеет ровно два различных решения.
Ответ:

3.10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\frac{x^2-4x+a}{5x^2-6ax+a^2}=0$$
имеет ровно два различных решения.
Ответ:

3.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\frac{2a-x^2-3x}{x+a^2}=0$$
имеет ровно два различных корня.
Ответ:

3.12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$
имеет ровно два различных корня.
Ответ:

3.13. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\frac{9x^2-a^2}{3x-9-2a}=0$$
имеет ровно два различных решения.
Ответ:

3.14. При каких значениях a уравнение
$$\frac{|4x|-x-3-a}{x^2-x-a}=0$$
имеет ровно 2 различных решения.
Ответ:

3.15. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$
имеет ровно два различных корня.
Ответ:

ГРАФИКИ ЛЕВОЙ И ПРАВОЙ ЧАСТЕЙ

3.16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$
имеет единственный корень.
Ответ:

3.17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$
имеет единственный корень.
Ответ:

3.18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$8a + \sqrt{7 + 6x - x^2} = ax + 4$$
имеет единственный корень.
Ответ:

3.19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{1 - 2x} = a - 3|x|$$
имеет более двух корней.
Ответ:

3.20. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{1 - 2x} = a - 7|x|$$
имеет более двух корней.
Ответ:

3.21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{1 - 2x} = a - 5|x|$$
имеет более двух корней.
Ответ:

3.22. При каких значениях a уравнение
$$\frac{x^2 - 2x + a^2 - 4a}{x^2 - a} = 0$$
имеет ровно 2 различных решения?
Ответ:

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

3.23. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{x + 4}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$
имеет ровно два различных решения.
Ответ:

3.24. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x + 3}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$
имеет ровно два различных решения.
Ответ:

3.25. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4 - y}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$
имеет три различных решения.
Ответ:

3.26. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (xy^2 - 2xy - 6y + 12)\sqrt{6 - x} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$
имеет ровно три различных решения.
Ответ:

3.27. Найдите все значений параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (y^2 - xy + x - 3y + 2)\sqrt{x + 3} = 0 \\ a - x - y = 0 \end{cases}$$
имеет ровно два различных решения.
Ответ:

3.28. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} 6x^2 - 5xy + y^2 + x - y - 2 = 0 \\ y = ax - 5 \end{cases}$$
имеет ровно одно решение.
Ответ:

3.29. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-3)(y+3x-9)=|x-3|^3\\ y=x+a\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ:

3.30. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-2)(y+2x-4)=|x-2|^3\\ y=x+a\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ:

3.31. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}x^4+y^2=a^2\\ x^2+y=|2a-4|\end{cases}$$

имеет четыре различных решения.

Ответ:

3.32. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2+4x=-3\\ x^2+y^2-6x-4y=a^2-13\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ:.

3.33. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(xy-x+7)(y-x+7)=0\\ y=3x+a\end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Ответ:

3.34. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(|x+1|+|x-3|-y)\sqrt{10-x-y}=0\\ y=x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ:

3.35. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x^2+3x+y-4)(x-y+4)\geq 0\\ ax-y-2a+3=0\\ x\leq 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ:

КОРЕНЬ И ЛОГАРИФМ

3.36. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-4x}\cdot\ln(9x^2-a^2)=\sqrt{1-4x}\cdot\ln(3x-a)$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ:

3.37. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-4x}\cdot\ln(9x^2-a^2)=\sqrt{1-4x}\cdot\ln(3x-a)$$

имеет ровно один корень.

Ответ:

3.38. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-5}\cdot\ln(4x^2-a^2)=\sqrt{3x-5}\cdot\ln(2x+a)$$

имеет ровно 1 корень.

Ответ:

3.39. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x}\cdot\ln(25x^2-a^2)=\sqrt{1-2x}\cdot\ln(5x-a)$$

имеет ровно один корень.

Ответ:

3.40. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-1}\cdot\ln(4x-a)=\sqrt{2x-1}\cdot\ln(5x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Ответ:

3.41. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(3x-a)=\sqrt{5x-3}\cdot\ln(4x+a)$$

имеет на отрезке $[0;1]$ ровно один корень.

Ответ:

3.42. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-3}\cdot\ln(5x-a)=\sqrt{4x-3}\cdot\ln(6x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Ответ:

3.43. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-4}\cdot\ln(3x-a)=\sqrt{5x-4}\cdot\ln(4x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Ответ: